DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2008.03.002

第21卷第3期 纺织高校基础科学学报 Vol.21, No.3
2008年9月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES Sept., 2008

* 研究简报 *
文章编号:1006-8341(2008)03-0378-03

关于Smarandache伪偶数序列

武 楠[1,2]

(1.西北大学 数学系,陕西 西安 710127;2.渭南师范学院 传媒工程系,陕西 渭南 714000)

摘要:研究Smarandache伪偶数序列的性质.利用初等及组合方法,给出了计算Smarandache伪偶数 个数的精确计算公式.解决了 Smarandache伪偶数 个数的计算问题.

关键词:Smarandache伪偶数;序列;计算公式
中图分类号:O 156.4 文献标识码:A

1 引言及结论

$\forall n \in \mathbf{N}_+$,如果它的某两位数字置换后(包括恒等置换)所得新的数字是个偶数,那么这个数称为第一类Smarandache伪偶数.例如0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, ….对于任意非偶整数n,如果它的某位数字置换换后所得新的数字是个偶数,那么这个数称为第二类Smarandache伪偶数.例如21, 23, 25, 27, 29, 41, 43, 45, 47, 49, 61, 63, 65, 67, 69, 81, ….在文献[1] 中,F.Smarandache教授建议研究这两个关于伪数序列的性质.显然,所有的偶数均为第一类Smarandache伪偶数.关于这两个数列的性质,一些学者也进行了研究,获得了不少有趣的结果.文献[2] 给出了每二类Smarandache伪偶数个数的渐近公式,并求出了除数函数在该序列上的均值定理,即就是证明了命题1.

命题1 $\forall x \in \mathbf{R}$, $x > 1$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n \in B \\ n \leqslant x}} 1 = \frac{1}{2} x + O(x^{\ln 5/\ln 10}),$$

$$\sum_{\substack{n \in B \\ n \leqslant x}} d(n) = \frac{1}{4} x \ln x + \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\right) x + O(x^{\ln 5/\ln 10 + \varepsilon}).$$

其中 B表示所有第二类Smarandache伪偶数的集合,$d(n)$是Dirichlet除数函数,γ是欧拉常数,ε为任意给定的正数.

本文利用初等及组合方法改进了文献[2] 的结果,给出了计算第一、二类Smarandache伪偶数个数的精确计算公式.令A表示所有第一类Smarandache伪偶数的集合,B表示所有第二类Smarandache伪偶数的集合.则有

定理1 $\forall x \in \mathbf{R}$, $x > 1$,记x的整数部分的十进制展开式为$[x] = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$,其中$0 \leqslant a_i \leqslant 10$ $(i = 0, 1, \cdots, m)$为正整数且$a_m \neq 0$, $k = \max\{i: a_i$ 为偶数且$i \in \{0, 1, \cdots, m\}\}$.则

(ⅰ)若$0 \leqslant k \leqslant m$,有

$$\sum_{\substack{n \in A \\ n \leqslant x}} 1 = [x] - \frac{5}{4}(5^m - 1) - \sum_{i=k}^{m} \left[\frac{a_i}{2}\right] 5^i;$$

收稿日期:2008-03-24
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介:武楠(1983-),女,陕西省镇安县人,西北大学生硕士生.E-mail:wn0808@yahoo.cn

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\leqslant x}}1=[x]-\frac{5}{4}(5^m-1)-\sum_{i=k}^{m}\left[\frac{a_i}{2}\right]5^i-5\times 10^{m-1}-5\sum_{i=0}^{m}(a_i-1)10^{i-1}-\left[\frac{a_0}{2}\right]-1.$$

（ⅱ）若 k 不存在，有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}1=[x]-\frac{5}{4}(5^m-1)-\sum_{i=0}^{m}\left[\frac{a_i}{2}\right]5^i-1;$$

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\leqslant x}}1=[x]-\frac{5}{4}(5^m-1)-\sum_{i=0}^{m}\left[\frac{a_i}{2}\right]5^i-5\times 10^{m-1}-5\sum_{i=0}^{m}(a_i-1)10^{i-1}-\left[\frac{a_0}{2}\right]-2,$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

2 定理的证明

事实上为求出$[1, x]$ 之间第一类 Smarandache 伪偶数的个数，只需用$[x]$ 减去$[1, x]$ 之间非第一类 Smarandache 伪偶数的个数，其中$[x]$ 表示 x 的最大整数. 而第二类 Smarandache 伪偶数的个数即就是第一类 Smarandache 伪偶数的个数与$[1, x]$ 之间偶数个数之差.

(1) 计算$[1, x]$ 之间第一类 Smarandache 伪偶数的个数. 为此分类计算. 非第一类 Smarandache 伪偶数中每一位数有 5 种可能，所以所有一位数中有 5 个，即就是 1, 3, 5, 7, 9；所有两位数中共有 5^2 个；所有三位数中共有 5^3 个，…，所有 m 位数中共有 5^m 个，

区间$[10^m, a_m10^m)$之间有$[a_m/2]5^m$ 个，

区间$[a_m10^m, a_m10^m+a_{m-1}10^{m-1})$之间有$[a_{m-1}/2]5^{m-1}$ 个，

……

区间$[a_m10^m+\cdots+a_{k+1}10^{k+1}, a_m10^m+\cdots+a_{k+1}10^{k+1}+a_k10^k)$之间有$[a_k/2]5^k$ 个，

区间$[a_m10^m+\cdots+a_{k+1}10^{k+1}+a_k10^k, a_m10^m+\cdots+a_0)$之间无非第一类 Smarandache 伪偶数.

(2) 计算区间$[1, x]$ 之间偶数的个数. 可以直接计算，也可以采用与上述相同的分类方法，区间$[1, x]$ 之间偶数中一位数有 5 个，即 0, 2, 4, 6, 8，两位数有 9×5 个，三位数有 $9\times 10\times 5$ 个，…，m 位数有 $9\times 10^{m-2}\times 5$ 个，

区间$[10^m, a_m10^m)$之间有$(a_m-1)\times 10^{m-1}\times 5$ 个，

区间$[a_m10^m, a_m10^m+a_{m-1}10^{m-1})$之间有$(a_{m-1}-1)\times 10^{m-2}\times 5$ 个，

……

区间$[a_m10^m+\cdots+a_110, a_m10^m+\cdots+a_110+a_0]$ 之间有$[a_0/2]+1$ 个.

所以区间$[1, x]$ 之间的偶数个数$[x/2]$ 为

$$5+9\times 5+9\times 10\times 5+\cdots+9\times 10^{m-2}\times 5+(a_m-1)\times 10^{m-1}\times 5+\cdots+[a_0/2]+1=$$
$$5\times 10^{m-1}+5\sum_{i=1}^{m}(a_i-1)10^{i-1}+[a_0/2]+1.$$

若 $0\leqslant k\leqslant m$，则 $a_m10^m+\cdots+a_0$ 为第一类 Smarandache 伪偶数，故

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}1=[x]-5-5^2-\cdots-5^m-\left[\frac{a_m}{2}\right]5^m-\left[\frac{a_{m-1}}{2}\right]5^{m-1}-\cdots-\left[\frac{a_k}{2}\right]5^k=$$
$$[x]-\frac{5}{4}(5^m-1)-\sum_{i=k}^{m}\left[\frac{a_i}{2}\right]5^i.$$

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\leqslant x}}1=\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}1-\sum_{\substack{2\mid n\\ n\leqslant x}}1=$$
$$[x]-\frac{5}{4}(5^m-1)-\sum_{i=k}^{m}\left[\frac{a_i}{2}\right]5^i-5\times 10^{m-1}-5\sum_{i=0}^{m}(a_i-1)10^{i-1}-\left[\frac{a_0}{2}\right]-1.$$

其中 $[y]$ 表示不超过 y 的最大整数.

若 k 不存在，即所有的 a_i $(i=0, 1, \cdots, m)$均为奇数，此时 $a_m10^m+\cdots+a_0$ 不是第一类 Smarandache 伪偶数，故

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}1=[x]-5-5^2-\cdots-5^m-\left[\frac{a_m}{2}\right]5^m-\left[\frac{a_{m-1}}{2}\right]5^{m-1}-\cdots-\left[\frac{a_1}{2}\right]5-\left[\frac{a_0}{2}\right]-1=$$

$$[x]-\frac{5}{4}(5^m-1)-\sum_{i=0}^{m}\left[\frac{a_i}{2}\right]5^i-1.$$

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\leqslant x}}=\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}1-\sum_{\substack{2|n\\ n\leqslant x}}1=$$

$$[x]-\frac{5}{4}(5^m-1)-\sum_{i=0}^{m}\left[\frac{a_i}{2}\right]5^i-5\times 10^{m-1}-5\sum_{i=0}^{m}(a_i-1)10^{i-1}-\left[\frac{a_0}{2}\right]-2.$$

于是完成了定理1的证明.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
[2] LIU Yan-ni. On the smarandache pseudo number sequence[J]. 数学季刊, 2006, 21(4): 581-584.
[3] APPOSTOL T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

On the Smarandache pseudo-even number

WU Nan[1,2]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710127, China;
2. Department of Media Engineering, Weinan Teachers′ College, Weinan, Shaanxi 714000, China)

Abstract: The property of sequence of the Smarandache pseudo-even number was studied. Using the elementary and combinational methods, an exactly calculating formula for the number of the Smarandache pseudo-even numbers was given. The calculating problem for the number of the Smarandache pseudo-even numbers is solved completely.

Key words: Smarandache pseudo-even number; sequence; calculating formula

编辑、校对:黄燕萍

(上接第377页)

One hybrid mean value formula involving Smarandache function and the least prime divisor function

HE Yang-fen[1,2], QI Qiong[3]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Yan′an Univesity, Yan′an, Shaanxi 716000, China;
2. Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710127, China;
3. College of Economics and Business Administration, Northwest University of Politics and Law, Xi′an 710063, China)

Abstract: Let n be any positive integer, Smarandache function $V(1)=1$, and if $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ is the canonical prime fractorzation of n, then $V(n)=\min_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_i\circ p_i\}$. The hybrid mean value involving Smarandache function and the least prime divisor function is studied by using the elementary methods and an interesting asymptotic formula is obtained.

Key words: Smarandache function; Abel′s identity; Riemann zeta-function

编辑、校对:黄燕萍